Дис 15.11.12

Зад

Ако $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

$a_n = (-1)^n$ $\quad |a_n| \to 1$

Нека $a_n \to 0$ за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.е. за $\forall n > n_0$ е изпълнено $|a_n - 0| < \varepsilon$ т.е $|a_n| < \varepsilon$

$||a_n| - 0| < \varepsilon \Rightarrow a_n < 0$

Нека $|a_n| \to 0 \Rightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.е за $\forall n > n_0$ имаме $||a_n| - 0| < \varepsilon \Rightarrow$ $|a_n| < 0$

$a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$

Нека $a_n \to 0$ def

за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.ка за $\forall n > n_0$ е в сила $|a_n| < \varepsilon$

Нека $M \in \mathbb{R}$. Искаме от известно място нататък да е изпълнено $\left|\frac{1}{a_n}\right| > M \Rightarrow$

това е еквивалентно на $|a_n| < \frac{1}{M}$

Понеже $a_n \to 0$, за $\varepsilon = \frac{1}{M}$ имаме $|a_n| < \varepsilon$ т.е редицата клони към безкрайност

$\frac{1}{a_n} \to \infty$

обратно

Нека $\frac{1}{a_n} \to \infty$. Тогава за $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ т.че $\forall n > n_0$ е изпълнено $\left|\frac{1}{a_n}\right| > M$

но това е еквивалентно на $|a_n| < \frac{1}{M}$

Искаме от известно място нататък $|a_n| < \varepsilon$ за $\forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$ което е изпълнено от известно място нататък защото е дадено $\frac{1}{a_n} \to \infty$

Покажете че редицата

$a_n = a^n$ при $a > 1 \longrightarrow +\infty$

$\exists \varepsilon > 0$ т.че $a = 1 + \varepsilon$

$a_n = (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k = 1 + n\varepsilon + __ > 1 + n\varepsilon$

за $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.че $1 + n_0\varepsilon > M$
и за $\forall n > n_0$ имаме $1 + n\varepsilon > M$

Иначе $\exists M \in \mathbb{R}$ т.че $1 + n\varepsilon \leq M$ за $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $n \leq \frac{M-1}{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ принцип на

Архимед - няма редица която да е ограничена отгоре $\Rightarrow$ противоречие

При $0 < a_n < 1$ имаме $\frac{1}{a} > 1$

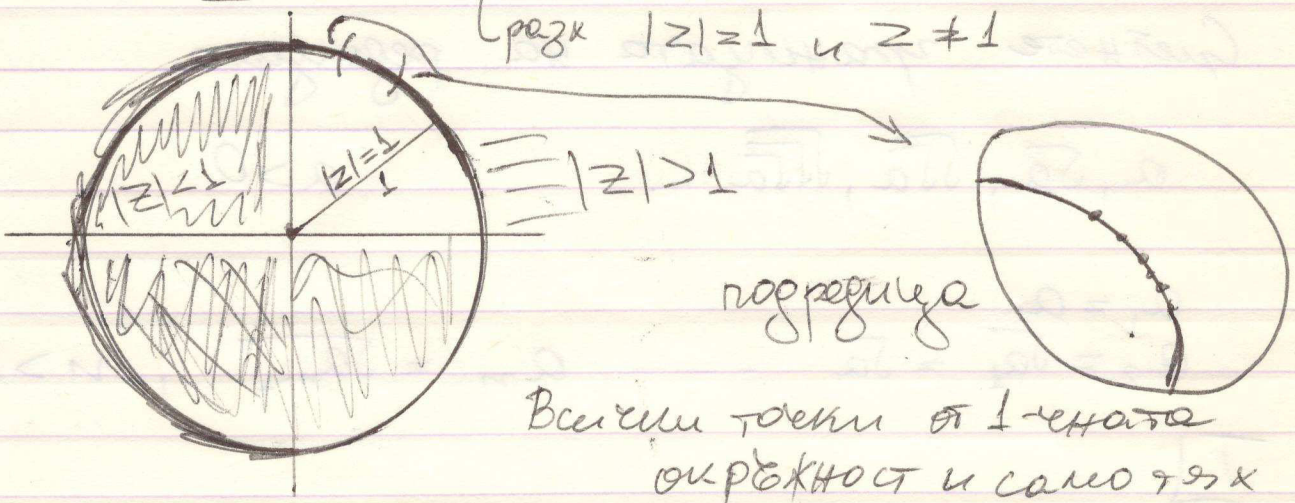
$$b_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_n}\right)^n} \longrightarrow 0 \Rightarrow b_n = \left(\frac{1}{\frac{1}{a_n}}\right)^n = a_n^n$$

$$a^n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \end{cases}$$

$$z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$|z^n| = |z|^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & |z| < 1 \\ \infty & |z| > 1 \end{cases}$$

$$z^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & |z| < 1 \\ \infty & |z| > 1 \\ \text{разх} & |z| = 1 \text{ и } z \neq 1 \end{cases}$$



Всички точки от 1-ченатa окръжност и самото 1

$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad a > 0$

искаме за $\forall \varepsilon > 0$ да направим разликата $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$

забележка:

ако $a > 1$ то $\sqrt[n]{a} > 1$

$$\sqrt[n]{a} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[n]{1} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n - 1^n \Leftrightarrow$$

$a - 1 \leq 0 \iff a \leq 1$!! противоречие

$\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \iff a < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow$

$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$

ако можем да изберем „n" така че

$a < 1 + n\varepsilon$ то $a < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow$

$n > \frac{a-1}{\varepsilon}$

Намерете границата на редицата

$a, \sqrt{a}, \sqrt{\sqrt{a}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} \ldots \quad a > 0$

$a_1 = a$

$a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{a}$ — — $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$; $n > 1$

Всяка ограничена монотонна редица е сходяща

Бележка

Ако $a > 1$ то $\sqrt{a} < a$

Нека $\sqrt{a} \geq a \iff \sqrt{a} - a \geq 0$ т.е

$\sqrt{a}(1 - \sqrt{a}) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0$ и

$1 - \sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \sqrt{a} \Rightarrow$

$1 \geq a$!! противоречие

$a_1 = a$

$a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{a} < a = a_1$

$a_3 = \sqrt{a_2} < \sqrt{a} = a_2$

по индукция ако $a_k < a_{k-1}$

да докажем че $a_{k+1} < a_k$

$a_k < a_{k-1} \Leftrightarrow \sqrt{a_{k-1}} < a_{k-1}$

$a_{k+1} = \sqrt{a_k} = \sqrt{\sqrt{a_{k-1}}} < \sqrt{a_{k-1}} = a_k$

Ограничена

$a_1 = a > 1$

$a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{a} > 1$

$a_3 = \sqrt{a_2} > 1$

по индукция ако $a_k > 1$ то

$a_{k+1} = \sqrt{a_k} > 1 \Rightarrow a_n$ е ограничена отдолу $\Rightarrow$

a_n е сходяща

$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$

при $n \to \infty$ имаме че $l = \sqrt{l} \Leftrightarrow$

$l - \sqrt{l} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{l}(\sqrt{l} - 1) = 0$

$l = 0$; $\sqrt{l} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{l} = 1 \Rightarrow l = 1$

$a_n > 1 \Rightarrow \lim a_n = 1$

Покажете че

$a_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

$\sqrt[n]{n} > 1$

за $\forall \varepsilon > 0$ ще намерим $n_0 \in \mathbb{N}$ т.че

за $\forall n > n_0$ $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow$

$n < (1+\varepsilon)^n$, ще вземем n_0

Така че да е изпълнено $n < n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$

$$\Rightarrow 1 < \varepsilon + \frac{(n-1)}{2}\varepsilon^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} + 1 - \varepsilon < \frac{n\varepsilon^2}{2} \quad / \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{2}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon^2} < n$$

$\lim \sqrt[n]{n+a}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$$\lim \sqrt[n]{n+a} = \lim \sqrt[n]{n\left(1+\frac{a}{n}\right)} = \lim \sqrt[n]{1+\frac{a}{n}} \sqrt[n]{n}$$

Зад

Ако $a_n \geq 0$ и $a_n \to a$ то $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Зад

От $a_n \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

преход от граници

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a-\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a+\varepsilon}$$
$$\downarrow \qquad \Downarrow \qquad \downarrow$$
$$1 \qquad 1$$

$$1 \leq \lim \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \Rightarrow 1 = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} \Rightarrow \lim \frac{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)} \Rightarrow$$

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0 \; ; \; \lim \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\lim \binom{n}{3} n^{-3} = \lim \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\, n^3} =$$

$$\lim \frac{n^3 + a_1 n^2 + a_2 n + a_3}{3!\, n^3} \Rightarrow$$

$$3!\, n^3 \to 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\lim \frac{1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3}}{3!} \Rightarrow \frac{1}{6}$$